229. Fandiño Pinilla M. I. (2014). Che cosa si intende per apprendimento concettuale in matemática. In: D'Amore B. (Editor) (2014). *La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire*. Atti del Convegno Nazionale omonimo, 3-4-5 marzo 2014, Tricase (Lecce). Bologna: Pitagora. Pagg. 104. ISBN: 88-371-1892-9. 19-24.

Martha Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Università di Bologna)

Che cosa si intende per apprendimento concettuale in matematica.

1. Registri di rappresentazione semiotica.

Va detto subito che l'apprendimento dei concetti della matematica è qualche cosa di specifico, rispetto alle altre discipline e in particolare alle altre scienze.
Nelle cosiddette *scienze sperimentali* si può far ricorso a "fatti", "oggetti", "cose",… cioè si possono "indicare" avvenimenti, strumenti, materiali concreti che sono l'oggetto stesso della trattazione o il riferimento ostensivo di quel che si sta dicendo.
In matematica no; i concetti della matematica rivestono un aspetto ideale, possono essere considerati, a seconda delle filosofie che li elaborano, astratti, ideali, linguistici, risultato di accordi interpersonali, scoperte, invenzioni, creazioni etc., ma *non* cadono comunque sotto i sensi.
Aristotele affermava che una cosa, cioè un oggetto inteso nella sua accezione più ingenua, ha tre caratteristiche che la definiscono: 1) è tridimensionale, 2) cade sotto i sensi umani, 3) è separabile dalle altre cose.
Una retta non è tridimensionale, non cade sotto alcun senso umano, non è separabile in senso concreto dagli altri concetti; dunque, la retta non è una cosa che possa essere indicata o mostrata, in senso ingenuo. Né il quadrato, né il punto, né il numero tre, né l'area, né la divisione, né la dimostrazione, né l'implicazione materiale etc.
L'unica cosa che l'essere umano è in grado di fare, rispetto ad un concetto matematico che vuole evocare, è quello di scegliere una rappresentazione in un registro semiotico opportuno, e lavorare su questa rappresentazione.
Se poi accettiamo un punto di vista ontologico, allora ha senso, com'è vezzo dei matematici, chiamare "oggetti" i concetti della matematica, nel senso qui appena delineato (per saperne di più, si veda D'Amore, 2003b).
Per poter capire a fondo il senso che hanno queste riflessioni che potrebbero apparire vaghe e fumose, ne darò una breve trattazione basata solo su esempi e sui primi principi della semiotica.

Comincio con il dire che, con il termine "noetica" si intende l'acquisizione concettuale; nel caso dell'ambiente scuola, l'apprendimento concettuale da parte dell'allievo; con il termine "semiotica" si intende la rappresentazione dei concetti mediante sistemi di segni.
Gli oggetti della matematica non esistono nella realtà concreta; in matematica l'unica cosa che possiamo fare è scegliere un registro semiotico e *rappresentare* quel concetto in quel registro, come abbiamo già detto.
Quel che si impara a maneggiare in matematica, dunque, non sono tanto gli oggetti quanto le loro *rappresentazioni* semiotiche; anche se l'obiettivo principale è la noetica, cioè l'apprendimento concettuale.
Va anche detto che l'attività semiotica è costitutiva dell'apprendimento, è parte stessa del funzionamento cognitivo in matematica, e non ha solo la funzione di appropriarsi e di comunicare concetti già acquisiti per altra via. Non possiamo non concordare con Duval (1993): «Non c'è noetica senza semiotica», e forse non solo nell'apprendimento della matematica.

Per esempio, rappresentiamo in diversi registri il concetto che formalizza l'idea di dividere a metà un intero, cioè l'oggetto matematico "metà":[1]

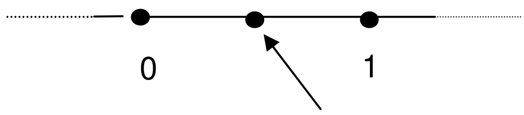
registro semiotico: la lingua comune: un mezzo, la metà, …

[1] L'esempio delle frazioni è a mio avviso paradigmatico; ad esso ho dedicato vari anni di studio (Fandiño Pinilla, 2005).

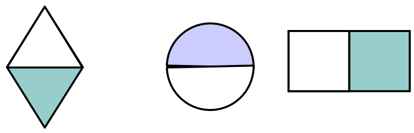
registro semiotico: la lingua aritmetica: ½, 2/4, 7/14… scrittura frazionaria; 0,5 scrittura decimale; 5×10^{-1} scrittura esponenziale; 50% scrittura percentuale; $0{,}4\overline{9}$; …

registro semiotico: la lingua algebrica: $\{x\in Q^{+}\ /\ 2x\text{-}1=0\}$ scrittura insiemistica; $y=f(x)$: $x\rightarrow x/2$ scrittura funzionale, …

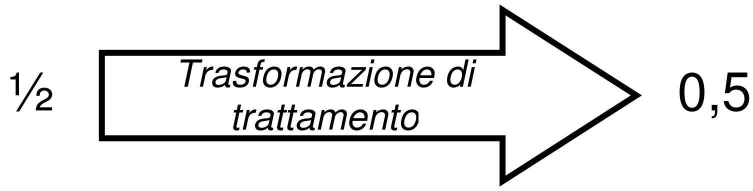
registro semiotico: il linguaggio figurale:



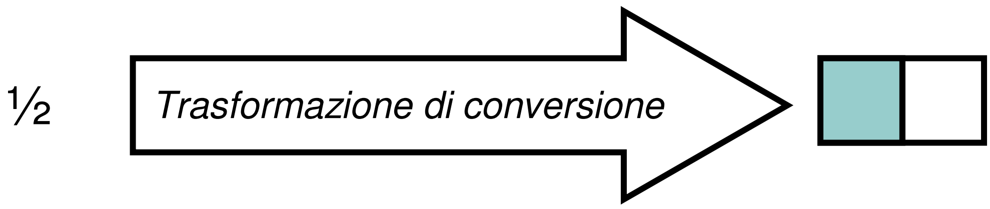
registro semiotico: schemi pittografici:



Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra nello stesso registro semiotico si chiama "trasformazione di trattamento":



Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra in un altro registro semiotico si chiama **"**trasformazione di conversione**":**



Nella semiotica, dunque, tre sono le operazioni fondamentali:
- *rappresentazione* (scelta degli elementi distintivi dell'oggetto da rappresentare e scelta del registro semiotico in cui rappresentarlo);
- *trattamento*;
- *conversione*.

La costruzione cognitiva degli oggetti matematici è strettamente connessa alla capacità di usare *più* registri di rappresentazione di quegli oggetti.
Possiamo perciò dichiarare che l'allievo ha raggiunto su un certo oggetto l'apprendimento concettuale quando è in grado di:
- scegliere i tratti distintivi del concetto e *rappresentarli* in un dato registro;
- *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro;
- *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro.

Si può considerare che un concetto è cognitivamente costruito quando l'allievo è rispettivamente in grado di:

- identificare proprietà del concetto utilizzabili in diversi contesti e dunque di rappresentarlo in maniera adeguata a seconda delle situazioni;
- di trasformare tale rappresentazione in caso di necessità;
- di usarla in modo opportuno in una pluralità di situazioni, anche dopo trasformazioni di conversione.

Non si può, a questo punto, non citare il celeberrimo "paradosso cognitivo" di Duval; vediamo in che cosa consiste (Duval, 1993, pag. 38; la traduzione è concordata con l'Autore): «(…) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche».
In questa fase "paradossale" dell'apprendimento, bisogna stare molto attenti; da un lato lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbe invece apprendere concetti; se l'insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, d'altra parte, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà "apprendendo" solo a far uso di segni (D'Amore, 1999a).

Mi pare che, centrando l'attività (e dunque la ricerca) didattica sull'apprendimento e dunque sull'epistemologia del versante che ha come protagonista l'allievo, si sia costretti ad interpretare ogni passo di costruzione della conoscenza come rispondente al *gioco di parole*, ammettendo dunque che vi sia una semantica che si confonde con la pragmatica d'uso.
Non solo: mi pare anche che si possa e si debba intendere la classe, l'aula, l'ambiente di insegnamento – apprendimento come una vera e propria "comunità di pratica" nella quale si *negoziano* i significati, dando loro quei significati che emergono e si concretizzano proprio nell'azione di negoziazione. Imporre significati e oggetti come dall'esterno, in una visione realista della matematica e del suo apprendimento, limita il potere di negoziazione dello studente che deve adattare i nuovi concetti in costruzione proposti dall'insegnante in base ad una trasposizione didattica opportuna, con quelli che informalmente ed ingenuamente già possiede; questa imposizione con la conseguente limitazione ha spesso il risultato di allontanare lo studente dalla costruzione concettuale matematica, rendendolo succube di una istituzione alla quale non demanda più il compito di accompagnarlo ed assisterlo nell'apprendimento, ma alla quale assegna in modo totalitario le scelte possibili, di contenuto e di modalità (si veda l'idea di *scolarizzazione* proposta in D'Amore, 1999b; D'Amore ha anche dimostrato ampiamente che uno dei motivi per cui non funzionano a volte le attività in situazione adidattica è proprio la confusione in cui versa lo studente, dovuta a eccesso di richieste semiotiche in situazioni realiste; si veda D'Amore, 2002b, 2003a).

Nel processo di insegnamento - apprendimento della matematica, ogni entrata in contatto con nuovi "oggetti di conoscenza matematica" (o, se si vuole abbreviare, "oggetti della matematica") è un contatto personale prima d'ogni altra cosa; dunque tale contatto mette in moto strumenti semiotici dalle due parti (la matematica che si vuole far apprendere e la persona che apprende); ma la relazione tra persona e oggetto è condizionata dal processo di istituzionalizzazione della conoscenza che porta, appunto, alla conoscenza istituzionalizzata di quell'oggetto.

2. Valutare l'apprendimento concettuale.

La ricerca in didattica della matematica ha creato una enorme quantità di strumenti per valutare l'apprendimento concettuale; rimando a Fandiño Pinilla M. I. (2008) per una loro analisi dettagliata, qui mi limito solo a ricordarne i nomi:
la tecnica dei TEP (una sigla tedesca, molto usata in didattica, per identificare testi scritti di matematica prodotti in modo autonomo, *textual eigenproduction*, produzioni testuali autonome degli allievi);
l'uso e la discussione delle mappe concettuali (elementi diagnostici che permettono la visualizzazione della realtà del gruppo classe; elementi organizzatori che permettono di stabilire il progresso nella

concettualizzazione degli allievi e le attività più consone alla situazione cognitiva reale; elementi organizzatori che permettono di stabilire l'efficacia dello svolgimento curricolare);
la tecnica dell'osservazione e richiesta di spiegazioni;
la tecnica dei resoconti;
la discussione collettiva in aula;
molte prove considerate "tradizionali";
In quanto precede abbiamo implicitamente privilegiato il "valutare per misurare, per dare un voto" (Fandiño Pinilla, 2002). Ma non dimentichiamo che:

- si valuta per prendere decisioni circa il contenuto (trasposizione didattica) e circa la metodologia del lavoro in aula (ingegneria didattica);
- si valuta per prendere decisioni circa l'ambiente di classe;
- si valuta per comunicare agli allievi quel che è importante.

Sarebbe inopportuno puntare tutto su uno solo degli aspetti relativi alla valutazione, come quella che assegna punti – numeri – note – voti – … allo studente, e basta. È professionalmente opportuno approfittare sempre di valutazioni a tutto campo.

Bibliografia.

D'Amore B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate.* 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (2002a). Basta. *La Vita Scolastica*. 8, 14-18.

D'Amore B. (2002b). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotà, Università Pedagogica Nazionale. 11, 63-71.

D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou la raison de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23(1).

D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives. 5, 37-65.

Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica.* Prefazione di Salvador Llinares. Presentazione di Franco Frabboni. Pitagora: Bologna.

Fandiño Pinilla M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Prefazione di Athanasios Gagatsis. Pitagora: Bologna.

Fandiño Pinilla M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento: Erickson.